OTKA nyilvántartási szám: T043034

STRUKTURÁLIS VIZSGÁLATOK ALGEBRÁKBAN

A kutatás eredményei

A kutatási program a következő kérdések vizsgálatát irányozta elő:

1. Algebrák reprezentációelmélete
2. Mátrixgyűrűk vizsgálata
3. Gyűrűk finom struktúrája
4. Radikálelmélet
5. Félcsoportelmélet

A programban kitűzött témák mindegyikében sikerült jelentős eredményeket elérnünk. Emellett a nemzetközi együttműködés során különösen gyakran adódhatnak váratlan, nagyon ígéretes kutatási témák, jó ötletekkel. Ezeket kiaknázatlanul hagyni vétek lenne, ugyanis a matematikai kutatások egészében az eredményesség és a színvonal számít, a tervezett témáktól való kisebb-nagyobb eltéréseknek pénzügyi kihatásaik nincsenek. Ilyen, eredetileg nem tervezett témákban is értünk el jelentős eredményeket.

A kutatásaink eredményeiből 82 tudományos közlemény készült, és ebben nem szerepelnek azok a már létező eredményeink, amelyek csak egy későbbi stádiumban kerülnek dolgozat formájában leí rásra. Nyilvánvaló, hogy az elért eredményeink közül csak a leglényegesebbekről eshet szó az alábbiakban, mégpedig kizárólag olyanokról, amelyek közlésre már be lettek nyújtva.

A vizsgálatok során nyert legfontosabb eredmények, módszerek leírása:

1. Algebrák reprezentációelmélete

A 90-es évek elején merült föl, hogy jellemezni kellene azokat a kváziöröklődő algebrákat, melyeknek a homologikus duálisa is kváziöröklődő. Dlab mutatott először példát olyan kváziöröklődő algebrára, amelyre ez a feltétel nem teljesül. A kérdésre az első szükséges és elégséges feltételt (fokszámozott algebrák esetében) Ágoston, Dlab és Lukács adták egy 2003-ban megjelent cikkükben. A fő állítás szerint egy fokszámozott kváziöröklődő algebrának pontosan akkor kváziöröklődő a homologikus duálisa is, ha az algebra ún. standard Koszul, azaz a standard modulusainak létezik lineáris projektív föloldása. Ilyenkor az algebra második duálisa izomorf az eredeti algebrával, így egy tökéletes dualitást kapunk. A standard Koszul-algebrákat azóta számosan alkalmazták cikkeikben.

Most az előbbi eredményt általánosítottuk: azt bizonyítottuk be, hogy ha egy standardul rétegezett fokszámozott Koszul-tulajdonságú algebrának a standard modulusai rendelkeznek lineáris projektív föloldással, akkor a homologikus duális is ugyanilyen típusú algebra lesz, és a második duális az eredeti algebrával lesz izomorf. Az könnyen látható, hogy egy (véges dimenziós) algebra homologikus duálisa pontosan akkor véges dimenziós, ha az algebra globális dimenziója véges. Mivel a standardul rétegezett algebrák közül egyedül a kváziöröklődő algebráknak véges a globális dimenziója, a dualitási eredmény kiterjesztése azért is érdekes, mert ily módon egyes végtelen dimenziós algebrák vizsgálata is könnyebbé válik a dualitáson keresztül. A bizonyítási módszerek teljes egészében újak az eredeti bizonyításhoz képest. Az eredeti homologikus módszerekkel szemben itt az algebra ún. Hilbert- és Poincaré-mátrixának a segítségével, lineáris algebrai módszerekkel sikerült a fő tételt bebizonyítani.

Dlab és Ringel egy korábbi eredményét továbbgondolva véges dimenziós algebrák között vezettünk be két ekvivalenciarelációt. Két algebrát akkor nevezünk Δ-ekvivalensnek, ha a standard modulusokkal filtrált modulusaik részkategóriái ekvivalensek. Megmutattuk, hogy minden Δ-ekvivalenciaosztályban pontosan egy standardul rétegezett algebra van, és ez megkonstruálható az ekvivalenciaosztály egy tetszőleges eleméből. Így értelmezhető egy Σ-val jelölt operátor, amely minden algebrához hozzárendeli a vele ekvivalens standardul rétegezett algebrát. Ezzel párhuzamosan értelmezhető egy Ω operátor is a valódi standard modulusoknak megfelelő reláció segítségével. Valamelyik oldalról standardul rétegezett algebrákra ismételten fölváltva alkalmazva a két operátort, korlátos sok lépésben fixponthoz jutunk: ez olyan algebra lesz, mely mindkét oldalról standardul rétegezett. Ily módon a Σ és az Ω operátorok Cayley-gráfja irányított fák diszjunkt uniójára bontja a véges dimenziós, valamelyik oldalról standardul rétegezett algebrák osztályát, melyeknek gyökerei a mindkét oldalon standardul rétegezett algebrák.

Minden véges dimenziós A algebrához hozzá lehet rendelni egy Abel-csoportot, az ún. Grothendieck-csoportot, amely szabad Abel-csoport az egyszerű A-modulusok kategóriáján. A Coxeter-transzformáció a Grothendieck-csoport egy automorfizmusa. Ezen transzformáció jelentősége nem csak az, hogy fontos szerepet játszik a Lie-algebrák elméletében, hanem az is, hogy Ringel egy eredménye szerint indukálható a modulusok ún. Auslander–Reiten-eltoltjával. Ezért fontos a véges dimenziós algebrák Coxeter-transzformációjának spektrális jellemzése.

Különösen érdekes a transzformáció spektrálsugarának becslése, ami az említett algebrák felbonthatatlan modulusainak növekedését jellemzi. Értékelt fák esetében már korábban sikerült erre felső és alsó korlátokat megadni. Most egy új módszert találtunk bizonyos speciális gráfok által meghatározott Coxeter-transzformáció spektrálsugarának a becslésére, és ezt alkalmaztuk általánosított csillaggráfokra.

A Coxeter-transzformáció karakterisztikus polinomjai reciprok polinomok. Csebisev-transzformáció alkalmazásával igazolható, hogy bizonyos körosztási polinomokat alkalmas módon perturbálva a keletkező reciprok polinomok zérushelyei az egységkörvonalon maradnak, és ott elég szabályosan helyezkednek el. Ezt észrevéve elégséges feltételeket sikerült adni arra, hogy egy reciprok polinom zérushelyei az egységkörre essenek. A. Schinzel vette észre, hogy ezen eredmények öninverzív polinomokra is átvihetők.

Vizsgálataink egyik célja a reciprok, öninverzív és Coxeter-polinomok zérushelyei eloszlásának vizsgálata volt, és szükséges és elégséges feltételek megadása olyan reciprok polinomok együtthatóira, melyeknek összes zérushelye az egységkörön van. Sikerült reciprok polinomok együtthatóira elégséges feltételeket találnunk arra, hogy öninverzív polinomok összes zérushelye az egységkörvonalon legyen, sőt, a zérushelyek elhelyezkedését is le tudtuk írni, majd reciprok polinomok együtthatóira egy újabb, a korábbi feltételeket speciális esetként tartalmazó elegendő feltételt találtunk arra, hogy a polinom összes zérushelye az egységkörvonalon legyen, és sikerült a zérushelyek elhelyezkedését is leírnunk.

A Coxeter-polinomok számelméleti szempontból is érdekes eredményeket adnak. A csillaggráfokhoz bármely irányítás mellett tartozó Coxeter-transzformáció spektrálsugarai Salem-számok. A legkisebb ismert Salem-szám (melyet Lehmer 1933-ban talált) egy (1,2,6) hosszú karokból álló csillag Coxeter-polinomjának egyetlen valós zérushelye. Most McKee and Smyth eredményein túlmenően, alkalmas gráfok csúcs-csúcs mátrixának karakterisztikus polinomját vizsgálva, Salem- és PV-számok egy bővebb osztályát adtuk meg.

2. Mátrixgyűrűk vizsgálata

Sikerült a Cayley–Hamilton azonosságot tetszőleges gyűrű feletti $n \times n$-es mátrixra megadni generikusan megkonstruálható kommutátorokat tartalmazó mátrix együtthatókkal. A klasszikus tétel ebből egyszerű speciális esetként kapható. A kapott azonosság éles minden olyan értelemben, amilyen értelemben a klasszikus Cayley–Hamilton azonosság éles a kommutatív gyűrűk feletti mátrixokra.

Egy adott gyűrű részgyűrűit vizsgáltuk abból a szempontból, hogy a részgyűrű egy invertálható elemének az inverze a tekintett részgyűrűben található-e. Az eredmények többsége mátrixgyűrűkről és azok nevezetes részgyűrűiről szól. Egy baloldali Noether-gyűrű feletti teljes mátrixgyűrűnek a skaláris mátrixokat tartalmazó részgyűrűje zárt az inverz képzésére. Hasonló állítás érvényes egy Lie-nilpotens gyűrű feletti teljes mátrixgyűrűre. A fő eredmény azt állítja, hogy egy PI-gyűrű feletti teljes mátrixgyűrűnek az ún. strukturális részgyűrűi zártak az inverz képzésére nézve. Az ún. Lie-feloldhatóság azonosságát teljesítő gyűrűk feletti 2×2-es mátrixokra találtunk egy Cayley–Hamilton azonosságot. A skaláris együtthatókat a szóban forgó mátrix hatványainak és azok bonyolultabb szorzatainak a nyomát felhasználva kaptuk.

Megadtuk egy nemlineáris szélsőérték meghatározási probléma lineáris (szuboptimális) megoldását, majd a lineáris feladat megoldását induló értékként felhasználva, egy általános páronkénti összehasonlítási mátrixnak egy olyan tranzitív mátrixszal való approximálását mutattuk be, amely annak legjobb közelítését adja a hibanégyzet összeg minimuma értelmében. Az itt származtatott nemlineáris egyenletet azután általánosítottuk, és megmutattuk, hogy ez a kifejezés nemcsak szimmetrikusan reciprok tulajdonsággal bíró, hanem bármilyen n-edrendű, pozitív elemű mátrix tranzitív mátrixszal való approximációjára használható. Ezt az eredményt összevetettük Chu logaritmikus transzformációra épülő módszerével, és megállapítottuk, hogy a két eljárás egyenértékű, de a mi módszerünk egyszerűbb és gyorsabb. Végül egy két paramétertől függő, exponenciális függvénnyel megadott multiplikatív perturbációt vezettünk be, amellyel szimmetrikusan reciprok módon perturbált komplex elemű tranzitív mátrixra explicit formában meghatároztuk a spektrumot. Ilyen mátrixokkal konkrét műszaki problémákra mutattunk be alkalmazásokat.

Generátorfüggvény-módszer segítségével igazoltuk Falk sejtését, miszerint páratlan rendű Kac-mátrixoknál a szinguláris értékek négyzete egész szám. (A fizikában jelentős szerepet játszó Kac-mátrixokat – ezek speciális tridiagonális matrixok – Sylvester definiálta 1854-ben, majd az ő ezekre vonatkozó sejtését Kac bizonyította be 1947-ben; innen ered a ma használatos nevük.)

Többféle építőmérnöki probléma is olyan algebrai egyenletrendszerre vezet, amelynek az együtthatómátrixa szegélyezett tridiagonális mátrix, tridiagonális blokkokból álló hipermátrix, ill. pentadiagonális mátrix. Ezek inverzét tudtuk explicit alakban előállítani, ill. az előállításukra egyszerűen programozható rekurzív algoritmust kidolgozni.

3. Gyűrűk finom struktúrája

Igen kiterjedt vizsgálatokat folytattunk algebrák deformációi terén. Itt lényeges a deformációk és a kontrakciók kapcsolata. A deformációkat elsősorban matematikusok vizsgálják, a kontrakciókat fizikusok. A két fogalom bizonyos értelemben egymás duálisa: az ún. ugró (jump) deformációk inverze kontrakció, és megfordítva. Így a két módszer összedolgozható, és ez új objektumokhoz és számítási módszerekhez vezetett, amelyeket több dolgozatban publikáltunk.

A formális deformáció fogalmát általánosítottuk végtelen dimenziós algebrai struktúrákra. Ennek szükségességét az jelezte, hogy vannak teljesen merev Lie-algebrák, amelyeknek fizikusok megadták szép, nemtriviális deformációit. Az elmélet kidolgozása mellett konkrét számolásokat is végeztünk. E téren kapott eredményeink közül kiemeljük azt, amely szerint az affin Krichever–Novikov algebrák az affin Kac–Moody algebrák geometriai deformációi.

Filiform nilpotens Lie-algebrák általánosítását vizsgáltuk végtelen dimenziós esetben. Az N-fokszámozott Lie-algebrák korábbi osztályozása után most kohomológia- és deformáció számításokat végeztünk.

Érdekes kérdés adott típusú n-dimenziós algebrai struktúrák varietásának topológiája. A verzális deformáció segítségével sikerült egy nem-Hausdorff topológiát meghatározni a kisdimenziós Lie-algebrák varietásán. A topologikus tér egy rétegezett orbifold, ahol az egyes rétegekbe az átmenetet a jump deformációk adják.

Az ún. "infinity algebrák" igen fontos, magasabbrendű algebrai struktúrák, amelyek szükségességét fizikai megjelenésük adja. Ezidáig kevés konkrét példa volt ismeretes rájuk, ezért most kis dimenzióban számoltunk ki ilyeneket, verzális deformációszámításokat is végezve.

Folytattuk a Morita-ekvivalenciára és -dualitásra vonatkozó vizsgálatainkat. Ismeretes, hogy a Morita-ekvivalencia megadható a Morita-összefüggés nyelvén, és fontos kérdés, hogy milyen feltételek mellett indukál egy Morita-összefüggés ekvivalenciát. Megmutattuk, hogy a Morita-összefüggés általában nem indukál ekvivalenciát a hozzárendelt endomorfizmusgyűrűk között. Példát konstruáltunk olyan Morita-összefüggésre is, amely nem ekvivalencia, de a benne lévő végesen generált projektív bimodulusok mégis ekvivalenciát indukálnak az endomorfizmusgyűrűk között.

A Morita-dualitás elméletében nagyon fontos kérdés, hogy milyen gyűrűk rendelkeznek öndualitással. Ismeretes, hogy a legjobb ismert nem-féligegyszerű, ún. soros gyűrűk önduálisak. Ezt belátták még a 80-as évek elején nagyon bonyolult, nehezen érthető és nagyon technikai számolással. Hiányzott még egy könnyen érthető, kevésbé technikai jellegű bizonyítás. Mivel az öröklődő prím Noether-gyűrűk faktorai véges sok soros gyűrű direkt összegeként állíthatók elő, azért Mueller azt sejtette, hogy az ilyen gyűrűkhöz létezik gyengén szimmetrikus öndualitás. Ezt a sejtést igazoltuk: megmutattuk, hogy a szemilokális, a radikáltopológiában teljes öröklődő prím Noether-gyűrűk önduálisak. A bizonyítás annak megmutatásán alapszik, hogy minden soros gyűrű egy soros kvázi-Frobenius-gyűrűnek vagy egy ilyen gyűrű egy jól meghatározott részgyűrűjének a faktora.

Egy $*$-primitív gyűrű vagy jobb és bal primitív, vagy egy bal és egy jobb primitív gyűrűnek egy bizonyos szubdirekt összege, amelyen az involució felcseréli a komponenseket. Példát adtunk olyan bal és jobb primitív gyűrűre, amely nem reprezentálható oszlop- és sorvéges mátrixszal. Jellemeztük a $*$-primitív gyűrűket maximális $*$-biideálok segítségével. Megmutattuk, hogy egy $*$-prím gyűrűnek akkor és csak akkor van minimális balideálja, ha van minimális $*$-biideálja, és ekkor a gyűrű $*$-primitív.

A csoportalgebrák vizsgálatában lényeges szerepük van a Lie-tulajdonságoknak. Ennek mintájára merült fel, hogy ezeket a tulajdonságokat keresztszorzatokban is tanulmányozni kell, és ebben jelentős eredményeket értünk el. Megmutattuk, hogy mind az alsó vagy felső Lie-nilpotens, mind az (n, m)-Engel keresztszorzatok szükségszerűen csavart csoportalgebrák, és az utóbbiak közül leírtuk azokat, amelyek rendelkeznek a szóban forgó tulajdonsgókkal.

A moduláris csoportalgebrák elméletének központi kérdése: ha G véges p-csoport, akkor a p elemű test feletti F_pG csoportalgebra egyértelműen meghatározza-e a G csoportot. Sok esetben ez így van. Berman ennél sokkal általánosabb kérdést tett fel: a moduláris csoportalgebra egységcsoportja egyértelműen meghatározza-e a G csoportot, és bebizonyította, hogy ha G véges Abel-csoport, akkor a válasz pozitív. Sikerült ezt most két további csoportosztályra megmutatnunk: ciklikus kommutátor részcsoporttal rendelkező véges p-csoportokra, ill. maximális osztályú 2-csoportokra.

Legyen $V(ZG)$ egy véges G csoportnak az egész számok feletti csoportgyűrűjében a normalizált egységcsoport. Zassenhaus 1974-ben kimondott, nevezetes sejtése szerint $V(ZG)$ minden torzióegysége konjugált a QG csoportalgebrában a G valamely elemével. A sejtést azóta is elég kevés csoportra sikerült igazolni, bár sokan foglalkoztak vele, ezért Kimmerle 2006-ban a sejtés egy gyengébb változatát fogalmazta meg. Ezt a Kimmerle-sejtést tudtuk igazolni több sporadikus egyszerű csoportra.

Legyen K $p \neq 0$ karakterisztikájú test, G csoport, és tekintsük a KG csoportalgebrát. Ismeretes, hogy ha KG Lie-nilpotens, akkor a felső (vagy alsó) Lie-nilpotencia indexe legföljebb $|G'| + 1$, ahol G' a G csoport kommutátor-részcsoportja. Korábban már meghatározták azokat a G csoportokat, amelyekre ez az index maximális vagy majdnem maximális (azaz $t^L(KG) = |G'| + 1$ vagy $t^L(KG) = |G'| - p + 2$). Most sikerült leírnunk azokat a G csoportokat, amelyekre a Lie-nilpotencia index az ezt követő érték, vagyis amelyekre $t^L(KG) = |G'| - 2p + 3$, $t^L(KG) = |G'| - 3p + 4$ és $t^L(KG) = |G'| - 4p + 5$.

4. Radikálelmélet

Olyan szimpliciális halmazt konstruáltunk, melynek elemei egy nullobjektummal, magokkal és komagokkal rendelkező kategória rövid egzakt sorozatai. Megmutattuk, hogy ez a konstrukció speciális esetként szolgáltatja mind a kategóriák faktorizációs rendszereit, mind félig-Abel kategóriákban (így pl. multioperátor-csoportok bármely varietásában) a Kuros–Amitsur radikálokat. Ez az eredmény a radikálok egy további kapcsolódási pontjára mutat rá.

Vizsgáltuk az olyan γ radikálokat, amelyekre az "$A[x] \in \gamma$ minden A nil gyűrűre" állítás ekvivalens a Köthe-probléma pozitív megoldásával. Konstruáltunk igen nagy ilyen tulajdonságú radikált, amely segítségül lehet negatív megoldás explicit megadásánál.

Bebizonyítottuk, hogy ha a normális radikálok jellemzésében a balideálokat biideálokkal helyettesítjük, akkor pontosan az A-radikálokat (azaz csak az additív csoporttól függő radikálokat), a normális radikálok egy speciális esetét kapjuk, és az A-radikálok hasonlóan jellemezhetők involúciógyűrűkben is.

Aktok öröklődő radikáljainak és injektív aktok ekvivalencia-osztályai által meghatározott torzióinak a kapcsolatát vizsgálva megmutattuk, hogy az öröklődő radikálok mindig torziók, de a fordított állítás hamis. Jellemeztük az öröklődő radikálokhoz, ill. a torziókhoz tartozó féligegyszerű osztályokat, valamint a torzióosztályokat. Ezen eredmények alapján remélhető, hogy aktokra is kiépül a modulusokéval analóg, részletes torzióelmélet.

5. Félcsoportelmélet

A félcsoportelmélet jellegzetes felbontástípusa a félhálófelbontás, amelynek számos kitüntetett tulajdonsága ismeretes. Ennek fényében meglepő, hogy a konstrukció funktoriális tulajdonságait (nevezetesen, hogy milyen pull-backeket őriz meg) még nem derítették fel. Ezt végeztük most el. Az várható volt, hogy a pull-backek általában nem őrződnek meg, a kérdés az, hogy mi a helyzet nevezetes speciális pull-backtípusokkal (pl. szorzat, véges szorzat, monomorfizmus), illetve szűkebb, kitüntett félcsoportosztályokkal (pl. kötegek, kommutatív félcsoportok). Mindezt sikerült leírnunk.

Egy félcsoportot permutatívnak nevezünk, ha teljesít valamely nem-identikus permutáció-azonosságot. Megmutattuk, hogy ha egy permutatív félcsoportban a kongruenciák láncot alkotnak a tartalmazásra nézve, akkor a félcsoport szükségképpen mediális. A fenti probléma általánosításával foglalkozva, megmutattuk, hogy ha egy permutatív félcsoportban a kongruenciák egymással felcserélhetők, akkor a félcsoport vagy mediális, vagy egy derékszögű Abel-csoportnak egy kommutatív nil félcsoporttal való ideál-bővítése, majd az is kiderült, hogy ez utóbbi esetben is következik a medialitás. Sikerült leírnunk a mediális kongruencia-felcserélhető félcsoportok egyik típusát is, megmutatva, hogyan kaphatók meg az azonos típusú kommutatív félcsoportokból. Cherubini és Bonzini munkái majdnem teljes leírást adtak a kongruencia-felcserélhető mediális félcsoportokra; egyedül az nem volt ismeretes, hogy létezik-e ezek között ún. első típusú ilyen félcsoport. Sikerült ez utóbbiakra általános konstrukciót adnunk, ezzel teljessé téve az ő leírásukat.

Megmutattuk továbbá, hogy egy félcsoport akkor és csak akkor reguláris és RGC_n-kommutatív, ha egy kommutatív Clifford-félcsoportnak és egy jobb reguláris kötegnek a koszorúszorzata.

6. Egyéb

A félig-Abel kategóriák vizsgálata során meglepő kapcsolatokat találtunk kategóriaelméleti és univerzális algebrai fogalmak között. Többek között megmutattuk, hogy az univerzális algebrában marginálisnak tartott "rög" (clot) fogalma a kategóriák nyelvén igen természetes: éppen a csoportelméletihez hasonló konjugálásra zártságot fejezi ki, és az univerzális algebrai nyelven nehezen kezelhető ideálok pontoson a rögök homomorf képei. Eredményeink teljesen új megvilágításba helyezik és jelentősen fölértékelik az univerzális algebrai ideálelméletet.

Korábbi vizsgálataink folytatásaként mind a szeparábilis torziómentes, mind az 1 torziómentes rangú vegyes Abel-csoportok osztályában meghatároztuk az endoprimál objektumokat. Megmutattuk, hogy a direkt felbonthatatlan Abel-csoportok között egyaránt léteznek akármilyen nagy endoprimál és akármilyen nagy nem endoprimál csoportok. Ez azt mutatja, hogy az endoprimál Abel-csoportok teljes leírása nem remélhető.

Egy sor eredményt értünk el algebrai struktúrákon adott kompatibilis részbenrendezések (kompatibilis) lineáris kiterjeszthetőségéről. Vizsgálataink a gyűrűelmélet felől indultak. Szükséges és elégséges feltételt találtunk a fenti kiterjeszthetőségre esetleg zérusosztókkal is rendelkező gyűrűkre: a gyűrűn adott (kompatibilis) rendezésnek pontosan akkor van lineáris kiterjesztése, ha egy bizonyos egyenletrendszer megoldható a gyűrűben. Ugyanezt a kérdést általános algebrai struktúrákban vizsgálva két különböző feltételt találtunk. Az egyikről megmutattuk, hogy minden esetben szükséges és elégséges a kiterjeszthetőségre. A másik feltétel szintén szükséges, de elégségességét csak bizonyos esetekben, többek között például a többségi függvénnyel rendelkező algebrákra sikerült belátni. Ezeket a feltételeket csak viszonylag bonyolult formulákkal lehet megadni. Szpilrajn klasszikus eredményét is általánosítottuk: egyetlen unér művelettel rendelkező algebrán adott kompatibilis részbenrendezésnek mindig létezik ún. kvázilineáris kiterjesztése (ez is kompatibilis). A kvázilinearitás a linearitásnál gyengébb tulajdonság, amely csak az unér műveletre nézve nem tiltott párok összehasonlíthatóságát követeli meg. A fő eredmény következménye, hogy az említett unér algebrán a maximális kompatibilis részbenrendezések pontosan a kvázilineárisak.

A modulusokra vonatkozó, közismert Fitting-lemmának olyan általánosítását találtuk, amelyből kiderül, hogy a lemma lényegében független a modulusoktól, teljesen elemi, kombinatorikus ratalma van. Az általános megfogalmazás segítségével például egy hálóelméleti Fitting-lemma is megkapható.

A kongruenciaszelídítés alkalmazásaként azokat a lokálisan véges varietásokat vizsgáltuk, ahol a főkongruenciák elsőrendű formulával definiálhatók. Kiderült, hogy a feloldható kongruenciák nilpotensek, az erősen feloldhatók pedig erősen Abel-félék.

A kongruenciaszelídítés módszereit sikerült összekapcsolnunk a számítástudományban a nyolcvanas évek óta jelentős szerepet játszó relációhomomorfizmus-problémával (Constraint Satisfaction Problem, röviden CSP). Ebben a témakörben vált nevezetessé az ún. dichotómiasejtés. Ismeretes, hogy ez a sejtés igaz olyan algebrákban, amelyekben van Malcev-kifejezés vagy majdnem többségi kifejezés. Most beláttuk a sejtést olyan algebrákra, amelyekben van három, a kongruenciadisztributivitást biztosító Jónsson-kifejezés. A probléma megközelítésének egy lehetséges módja az, ha McKenzie-nek és Hobby-nak az **1** és **5** típus hiányát jellemző Malcev-feltételét minél "erősebb" termekkel fejezzük ki. Egy ilyen erősítést is megadtunk.

Megmutattuk, hogy Chajda és Horváth ún. háromszög-lemmája egy lokálisan véges varietásokban Hobby és McKenzie által megadott Malcev-feltétellel ekvivalens, következésképpen a kongruenciahálók egyesítés-szemidisztributivitását jellemzi. Megkonstruáltunk egy a fentinél erősebb, de azzal nem lokálisan véges varietásokban is ekvivalens Malcev-feltételt, amely a háromszög-elv toleranciákat tartalmazó erősítésének felel meg.